

МКОУ «Погорельская СОШ»

# ОБЪЕМ ТЕЛА

**№ 676** Найти объем наклонной призмы, у которой основанием является треугольник со сторонами 10см,10см,12см, а боковое ребро равное 8см, составляет с плоскостью основания угол  $60^{\circ}$

Дано:  $ABCA_1B_1C_1$ - наклонная прямая призма.  $\angle B_1BK=60^{\circ}$ ,  $BC=10\text{см}$ ,  
 $AB=10\text{см}$ ,  $AC=12\text{см}$ ,  $BB_1=8\text{см}$ .

Найти:  $V_{\text{призмы}}=?$

**Решение:**

$V = S_{\text{ABC}} * h$ ,  $S_{\text{осн.}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  - формула Герона

$$S_{\text{осн.}} = \sqrt{16 * 6 * 4 * 6} = 4 * 2 * 6 = 48 (\text{см}^2)$$

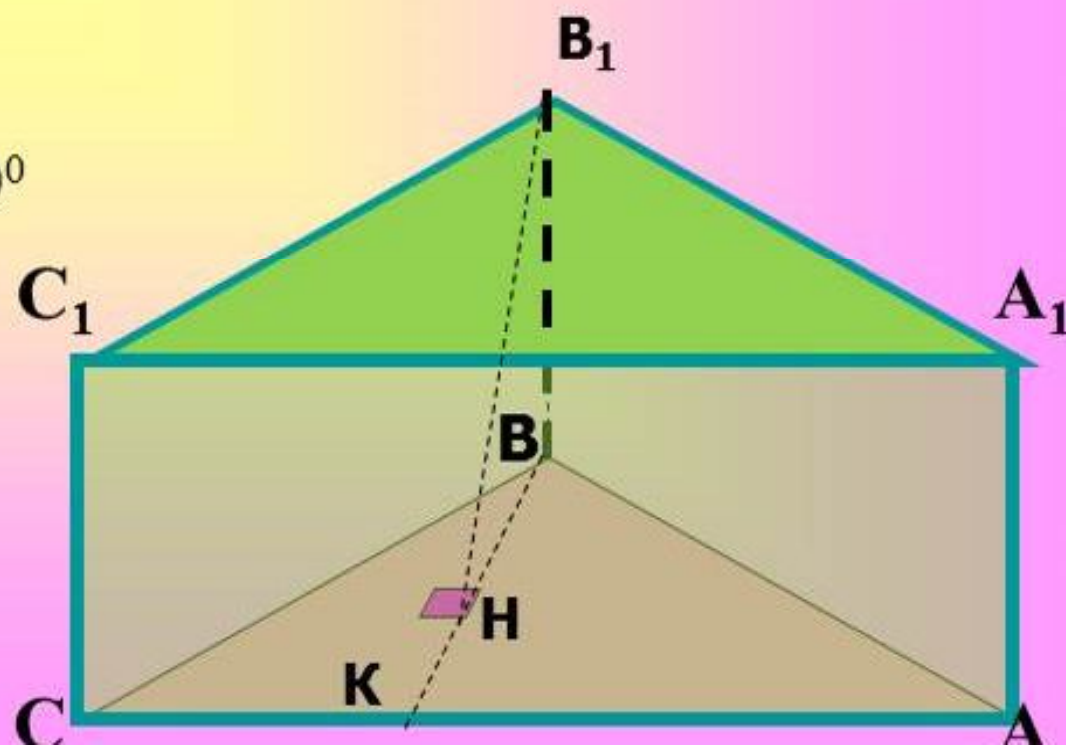
Треугольник  $BB_1H$ - прямоугольный,

так как  $B_1H$  — высота  $B_1H = BB_1 * \sin 60^{\circ}$

$$B_1H = 8 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} (\text{см})$$

$$V = 4\sqrt{3} * 48 = 192\sqrt{3} (\text{см}^3)$$

**Ответ:**  $V_{\text{пр.}} = 192\sqrt{3} (\text{см}^3)$



# № 680

Основанием наклонного параллелепипеда является прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ . Боковое ребро длины  $c$  составляет со смежными сторонами основания углы, равные  $\beta$ . Найти объем параллелепипеда.

Дано:  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ -призма,  $ABCD$ -прямоугольник,  $AB=a$ ,  $AD=b$ ,  $AA_1=c$ ,  
 $\angle A_1AD = \angle A_1AB = \beta$

Найти:  $V_{\text{призмы}} = ?$

Решение:

1.  $\angle A_1AD = \angle A_1AB$  значит точка  $A_1$  проецируется на биссектрису  $\angle A$ ,  $A_1O \perp (ABC)$ ,  $AO$ -биссектриса  $\angle A$

1. Так как  $A_1O \perp (ABC)$ ,  $OM \perp AD$  ( $OM$ -проекция,  $A_1M$ -наклонная) отсюда следует,  $A_1M \perp AD$

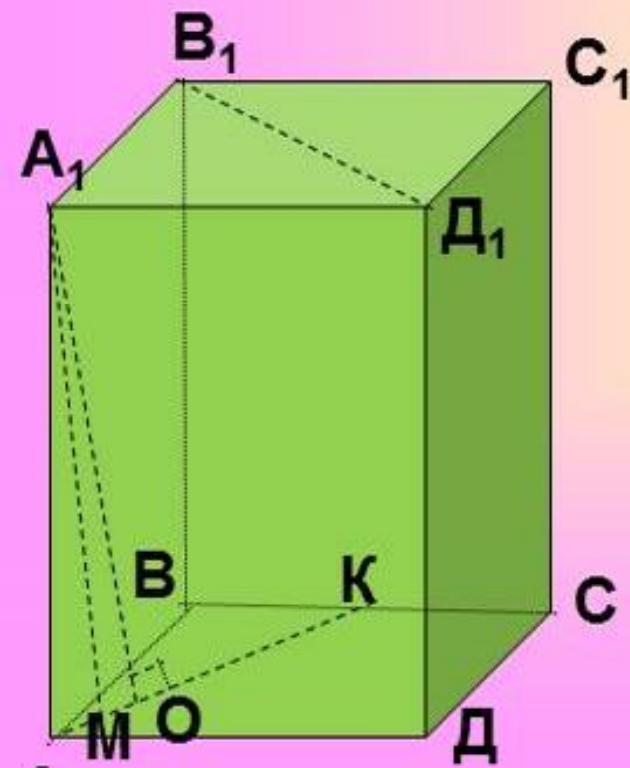
1. Треугольник  $AA_1M$ -прямоугольный,  $AM = c \cdot \cos \beta$

2. Треугольник  $AOM$ -прямоугольный,  $AO = \sqrt{2} \cdot AM$ ,  
 $AO = \sqrt{2} \cdot c \cdot \cos \beta$

1.  $A_1O = \sqrt{c^2 - 2c^2 \cos^2 \beta} = c \sqrt{1 - 2 \cos^2 \beta} = c \sqrt{-\cos 2\beta}$ .

1.  $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = a \cdot b \cdot c \sqrt{-\cos 2\beta}$

Ответ :  $V = a \cdot b \cdot c \sqrt{-\cos 2\beta}$



## Решение задач по готовым чертежам

Дано: ABCD- правильная пирамида.  $AB=3$ ,  $AD=2\sqrt{3}$

Найти: а)  $S_{\text{осн.}}$ , б)  $AO$ , в)  $DO$ , г)  $V$ -?

Решение:  $S_{\text{осн.}}$ =( используем формулу для вычисления площади правильного  $\Delta$ ) =

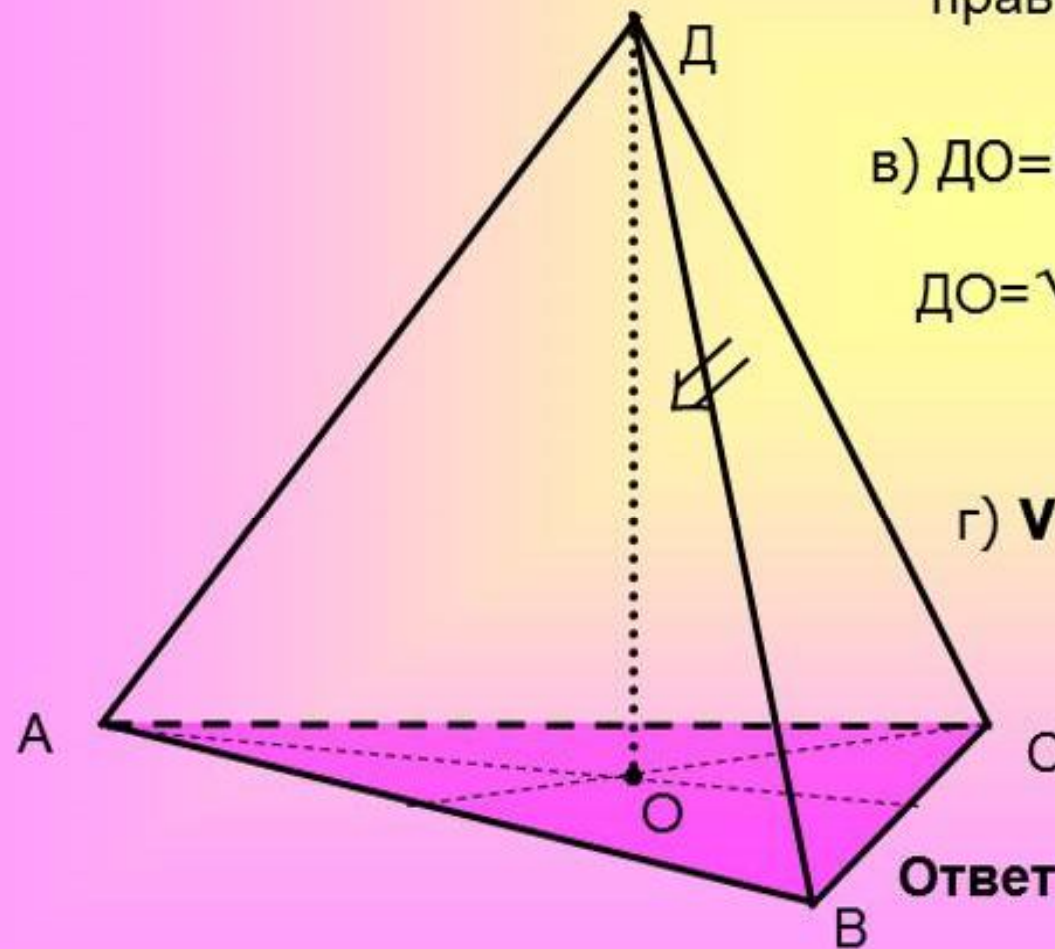
$$\text{а) } S_{\text{осн.}} = a^2 \sqrt{3}/4 = 9\sqrt{3}/4 .$$

$$\text{б) } AO = R = h \cdot 2/3 = a\sqrt{3}/3 \text{ (формула радиуса описанной окружности через сторону правильного } \Delta \text{). } AO = 3\sqrt{3}/3 = \sqrt{3}$$

$$\text{в) } DO = H = \sqrt{AD^2 - AO^2} \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$DO = \sqrt{2(\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{3}/3)^2} = \sqrt{12 - 9/3} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{г) } V = 1/3 \cdot S_{\text{осн.}} \cdot H = 1/3 \cdot 9\sqrt{3}/4 \cdot 3 = 9\sqrt{3}/4$$



**Ответ:**  $S_{\text{осн.}} = 9\sqrt{3}/4$  ,  $AO = \sqrt{3}$ ,  $DO = 3$ ,  $V = 9\sqrt{3}/4$

## Решение задач по готовым чертежам

Дано: ABCDF- правильная пирамида.  $\angle FCO=45^\circ$ ,  $FO=2$ .

Найти: а)  $S_{\text{осн.}}$ , б)  $V$ -?

Решение: Рассмотрим  $\Delta FCO$ :

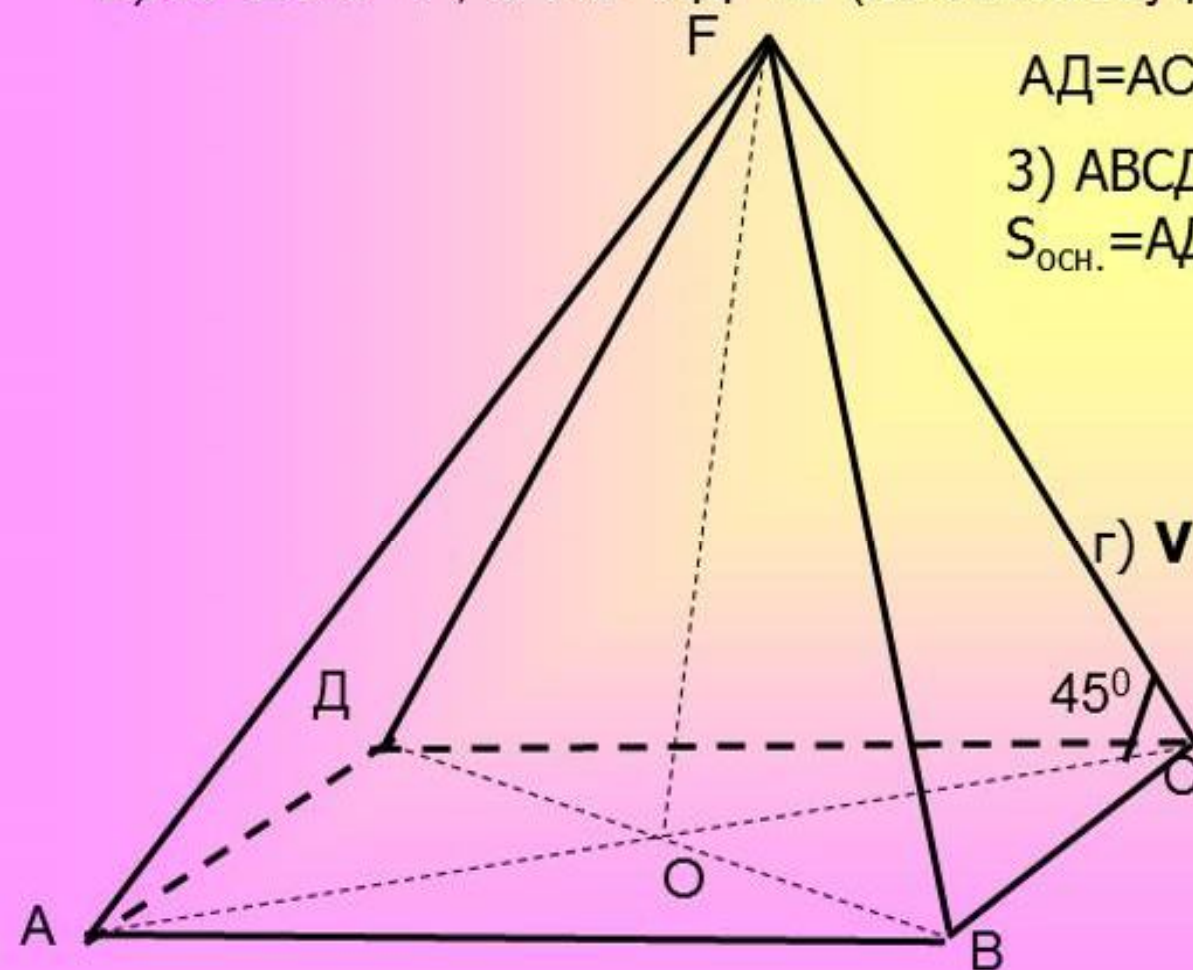
1) Из  $\Delta FCO$ :  $\angle O=90^\circ$ ,  $\angle C=45^\circ$ , значит,  $\angle F=45^\circ$ . Следовательно,  $\Delta FCO$ - равнобедренный,  $OC=FO=2$ .

2)  $AC=2OC=4$ ,  $d=AC=AD=\sqrt{2}$  (по свойству диагонали квадрата,  $d^2=2a^2$ ). Тогда

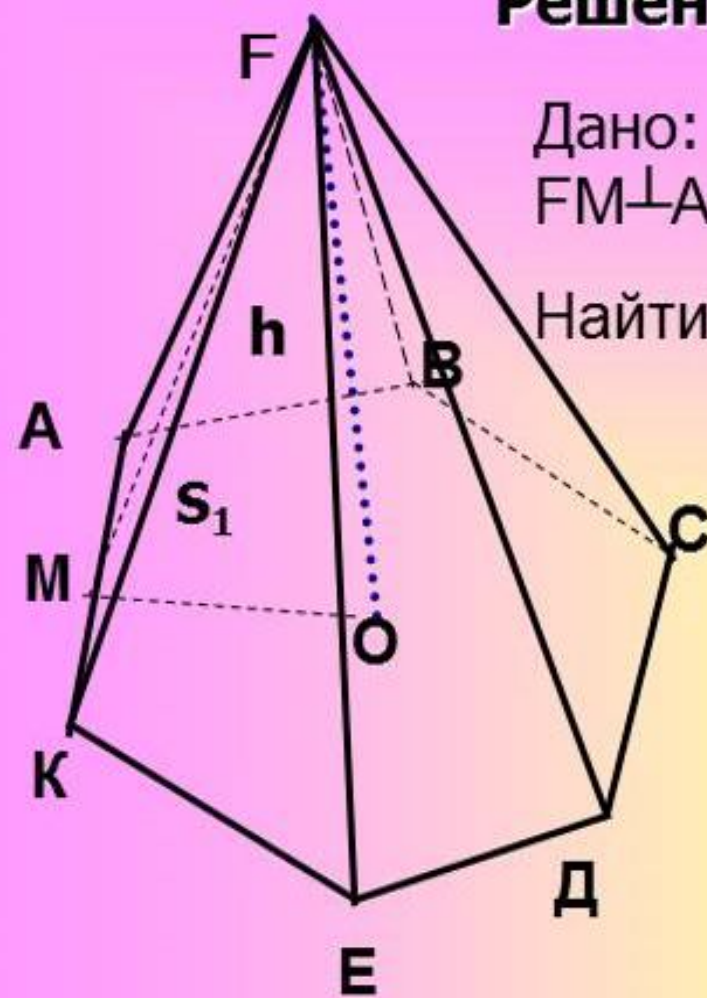
$$AD=AC/\sqrt{2} = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

3) ABCD- квадрат (пирамида правильная).  
 $S_{\text{осн.}}=AD^2=(2\sqrt{2})^2=8$

$$\text{г) } V=1/3 * S_{\text{осн.}} * h=1/3 * 8 * 2=16/3=5 \frac{1}{3}.$$



**Ответ:**  $S_{\text{осн.}}=8$ ,  $V=5 \frac{1}{3}$



Дано: ABCDEKF-правильная пирамида.  $FO \perp (ABC)$ ,  
 $FM \perp AK$ ,  $FO=4$ ,  $FM=5$ .

Найти: а)  $S_{\text{осн.}}$ =? б)  $V$ =?

Решение:

- Рассмотрим треугольник FOM:  $\angle O = 90^\circ$   
 (так как  $FO \perp (ABC)$ , значит  $FO \perp OM$ ),  $FO=4$ ,  
 $FM=5$ ,  $OM = \sqrt{FM^2 - FO^2}$  (по теореме Пифагора)  
 $OM = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$ ,  $OM = r$  (радиус окружности  
 вписанной в правильный шестиугольник ).

$$AK = 2r \cdot \tan \frac{\pi}{6} = 2 \cdot 3 \cdot \tan \frac{\pi}{6} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$2. S_{\text{осн.}} = 6 \cdot S_{\text{АОК}} \quad S_{\text{(АОК)}} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3} \quad . \quad S_{\text{осн.}} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \quad .$$

$$3. V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot h, \quad V = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 4 = 24\sqrt{3}.$$

**Ответ:  $S_{\text{осн.}} = 18\sqrt{3}$  ед<sup>2</sup>,  $V = 24\sqrt{3}$  ед<sup>3</sup>.**

# Задача №1

Смолу для промышленных нужд собирают, подвешивая конические воронки к соснам. Сколько воронок диаметром 10 см с образующей 13 см нужно собрать, чтобы заполнить 10 – литровое ведро?

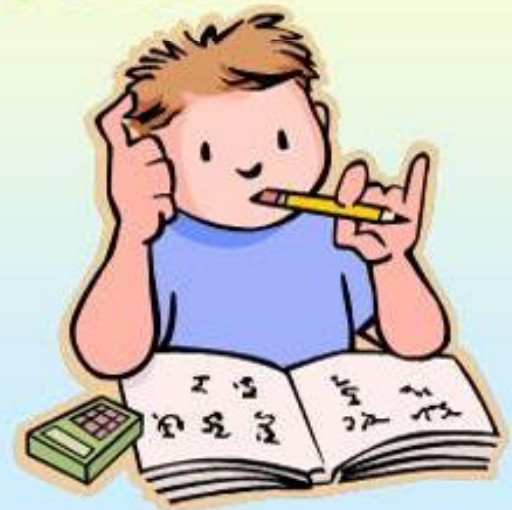
Ответ:  $\approx 32$  воронки.



## Задача №2

Авиационная бомба среднего калибра даёт при взрыве воронку диаметром 6м и глубиной 2 м. Какое количество земли (по массе) выбрасывает эта бомба, если 1 кубический метр земли имеет массу 1650 кг ?

**Ответ: 31 тонна.**





# Задача

«... Читал я где-то,  
Что царь однажды воинам своим  
Велел снести земли по горсти в кучу.  
И гордый холм возвысился,  
И царь мог с высоты с весельем озираться  
И дол, покрытый белыми шатрами,  
И море, где бежали корабли.»



(А. С. Пушкин «Скупой рыцарь»)

Войско – 100 000 воинов

1 горсть = 0,2 дм<sup>3</sup>

Угол откоса = 45°

Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 19. Найдите ребро куба.

Объем куба увеличится на 19. Составим и решим уравнение:

$$(x+1)^3 = x^3$$

	$a$ ребро	$V$
<b>1 куб</b> Исходный куб	$x$	$x^3$
<b>2 куб</b> Новый куб	$x+1$	$(x+1)^3$

на 19  $+19$   
 $>$

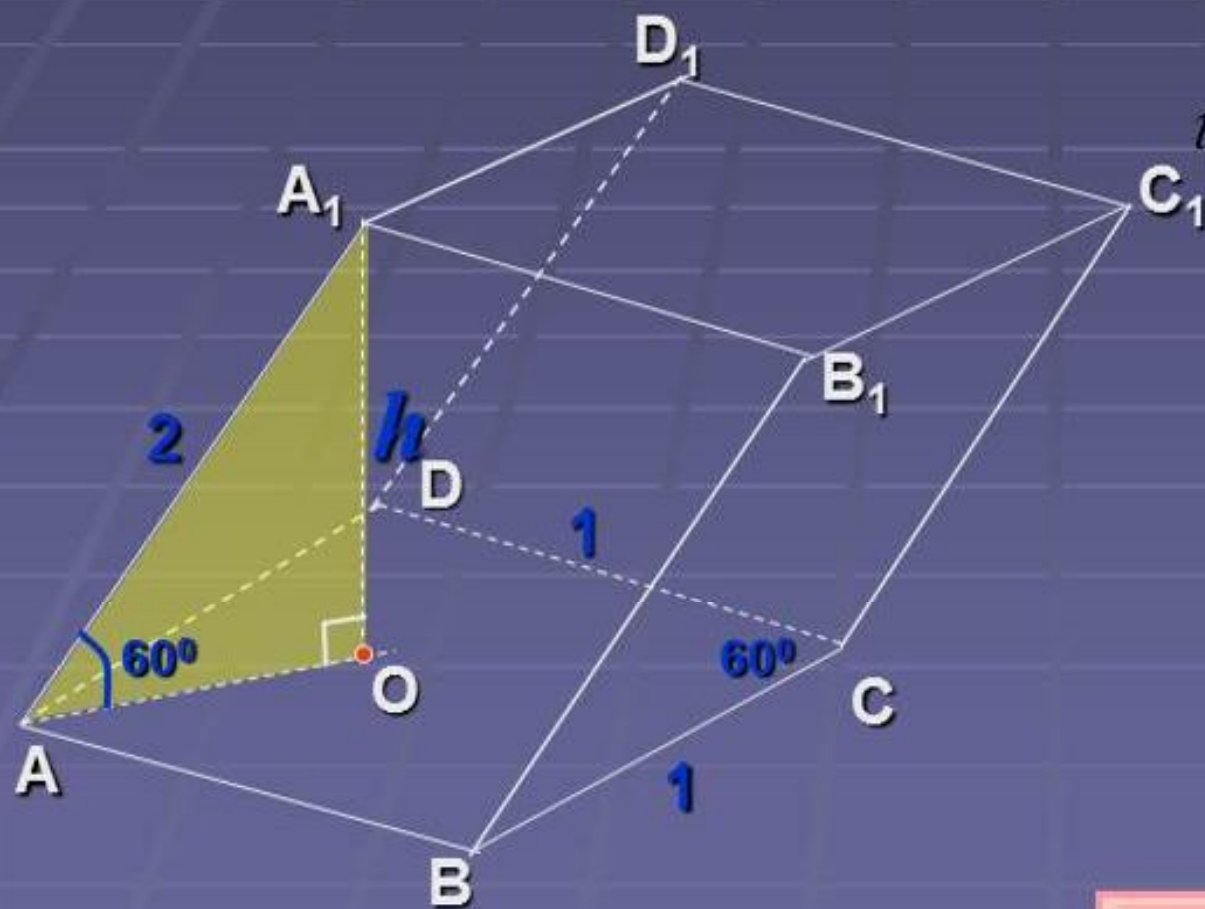
В

2

Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом  $60^\circ$ . Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в  $60^\circ$  и равно 2. Найдите объем параллелепипеда.

$$V_{\text{приз.}} = S_{\text{о}} \cdot h$$

$$S_{\text{ромб.}} = 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\text{из } \triangle AA_1O: \sin 60^\circ = \frac{h}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2}$$

$$h = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

**В** 1, 5

Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin a$$

Обе призмы имеют одинаковую высоту

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1 h}{S_2 h} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin \varphi \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \sin \varphi \cdot h} = \frac{1}{4}$$

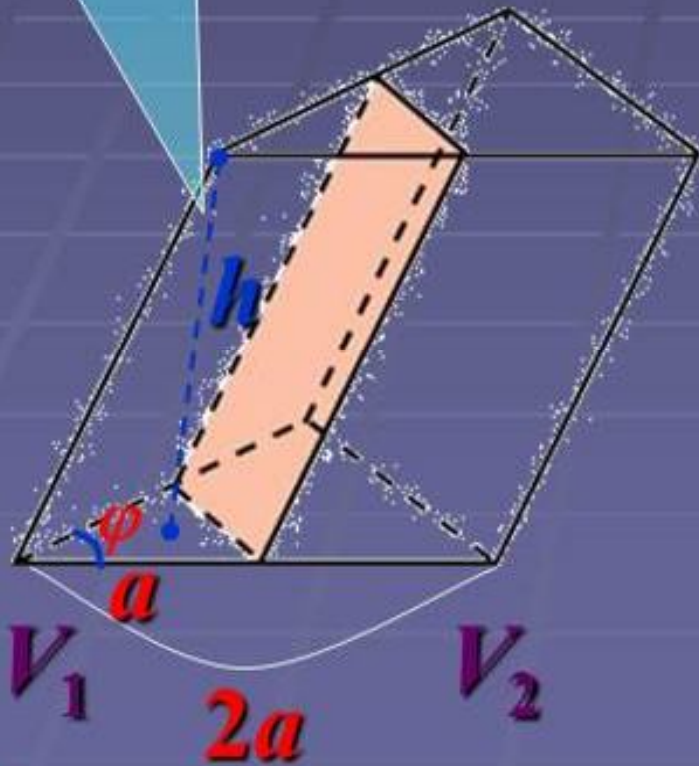
Найдем отношение объемов

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$$

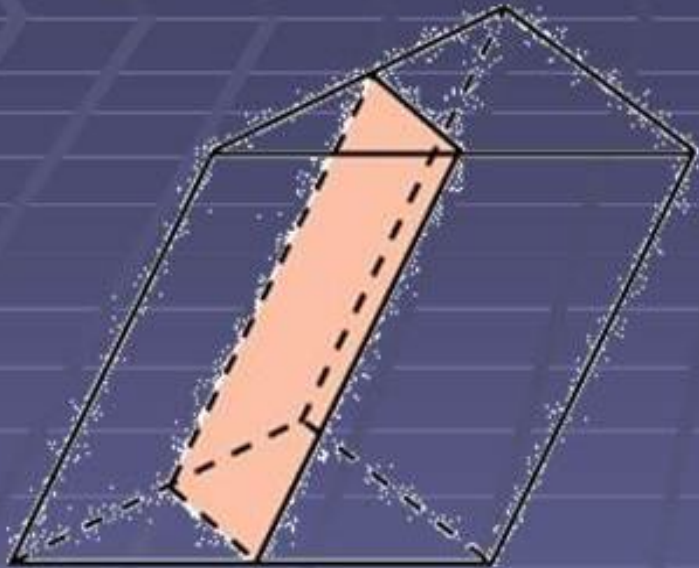
32

В	8					
---	---	--	--	--	--	--

9



Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объем отсеченной треугольной призмы равен 5. Найдите объем исходной призмы.

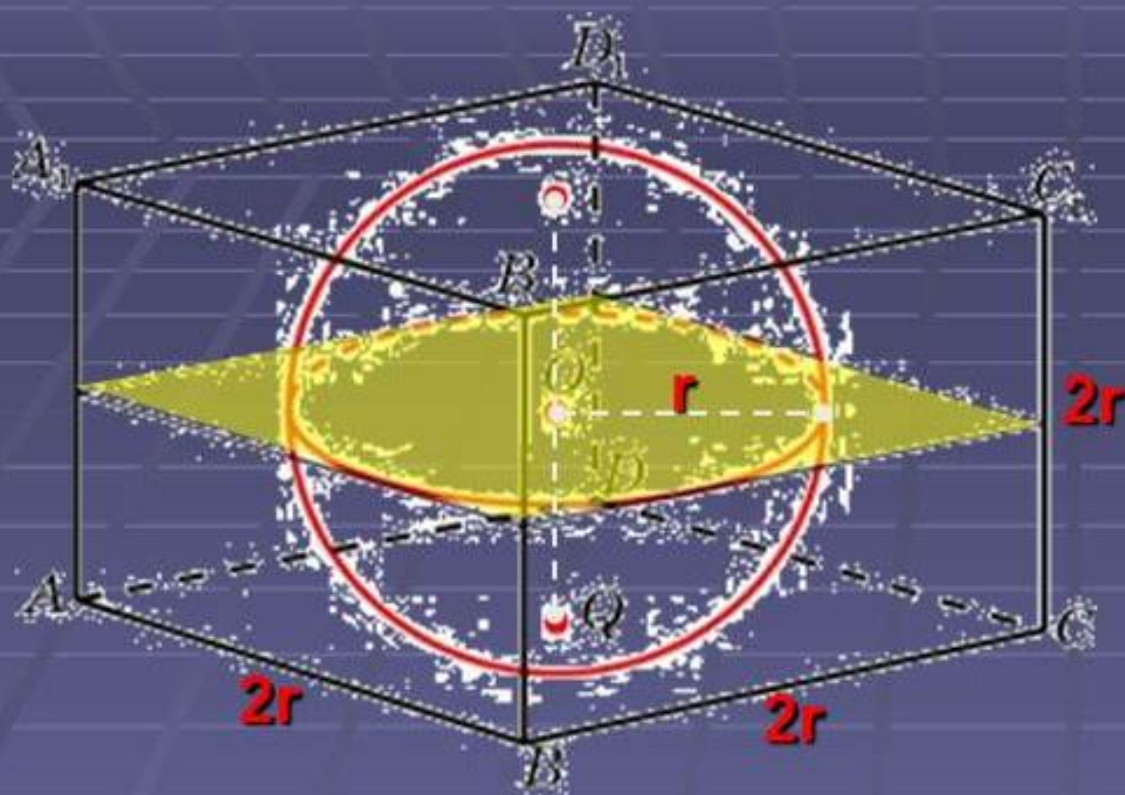


$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$$

Применим результат, полученный в предыдущей задаче

В	2	0				
---	---	---	--	--	--	--

Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.



$$a = 2r$$

$$V_{\text{к.п.}} = (2r)^3$$

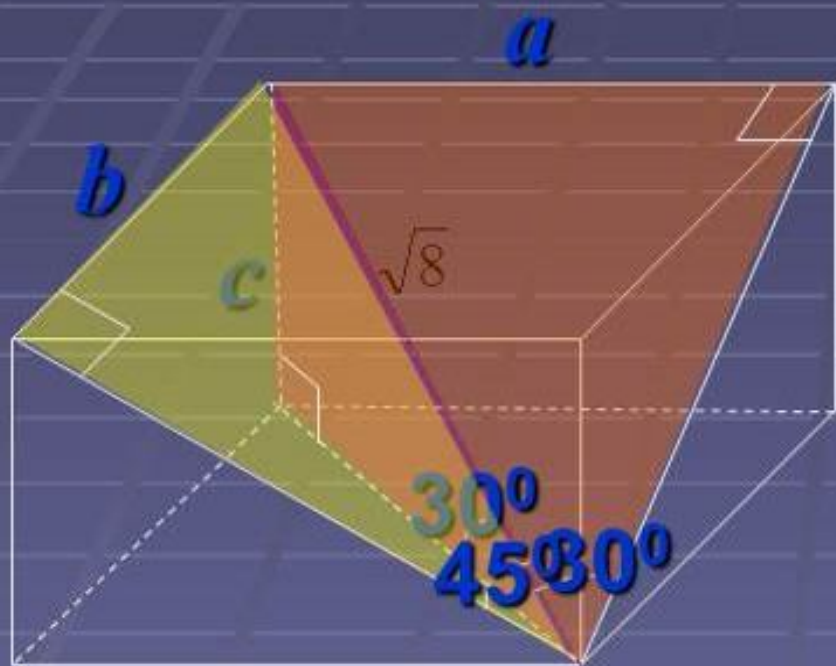
$$216 = 8r^3$$

$$r^3 = 27$$

$$r = 3$$

<b>В</b>	<b>3</b>					
----------	----------	--	--	--	--	--

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна  $\sqrt{8}$  и образует углы  $30^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $45^\circ$  с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.



Найдем длину, ширину и высоту параллелепипеда.

$$a = \sqrt{8} \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{8} \cdot 1}{2} = \sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{8} \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{8} \cdot 1}{2} = \sqrt{2}$$

$$c = \sqrt{8} \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}}{2} = 2$$

$$V = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 4$$

В	4					
---	---	--	--	--	--	--

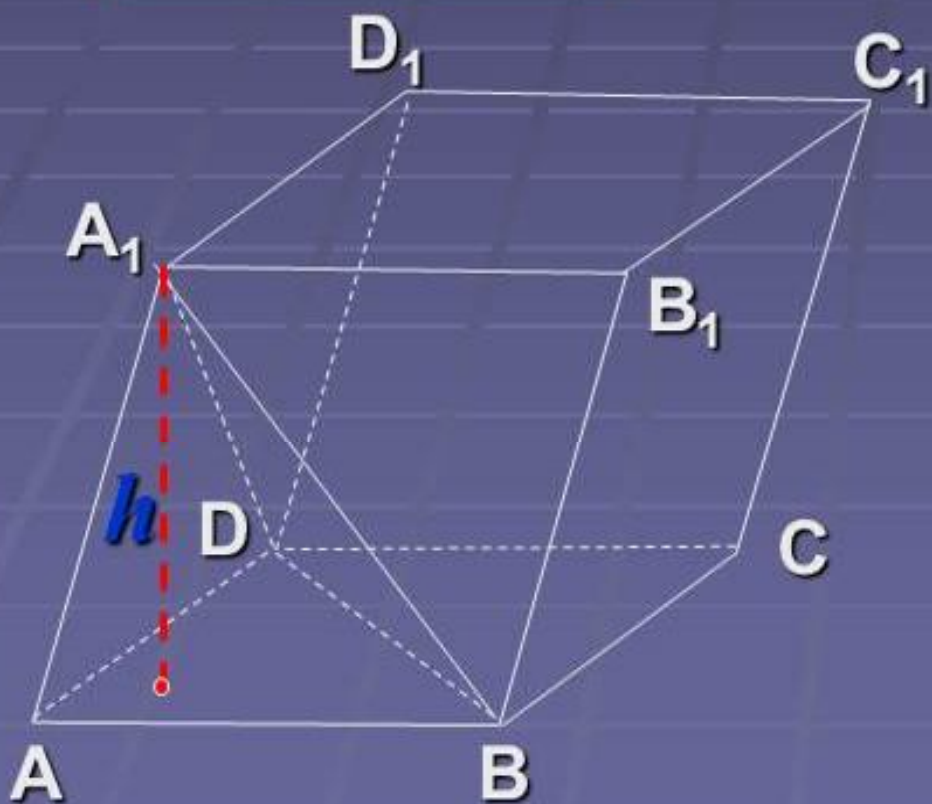
Объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равен 9.  
 Найдите объем треугольной пирамиды  $ABCA_1$ .

$$V_{\text{приз.}} = S_o H$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_o H$$

$$\frac{V_{\text{приз.}}}{V_{\text{пир.}}} = \frac{S_{ABCD} \cancel{h}}{\frac{1}{3} S_{ABD} \cancel{h}} = \frac{2S_{ABC} \cancel{h}}{\frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cancel{h}} = \frac{6}{1}$$

Найдем отношение объемов



$$\frac{V_{\text{приз.}}}{V_{\text{пир.}}} = \frac{9}{1}$$

В

1

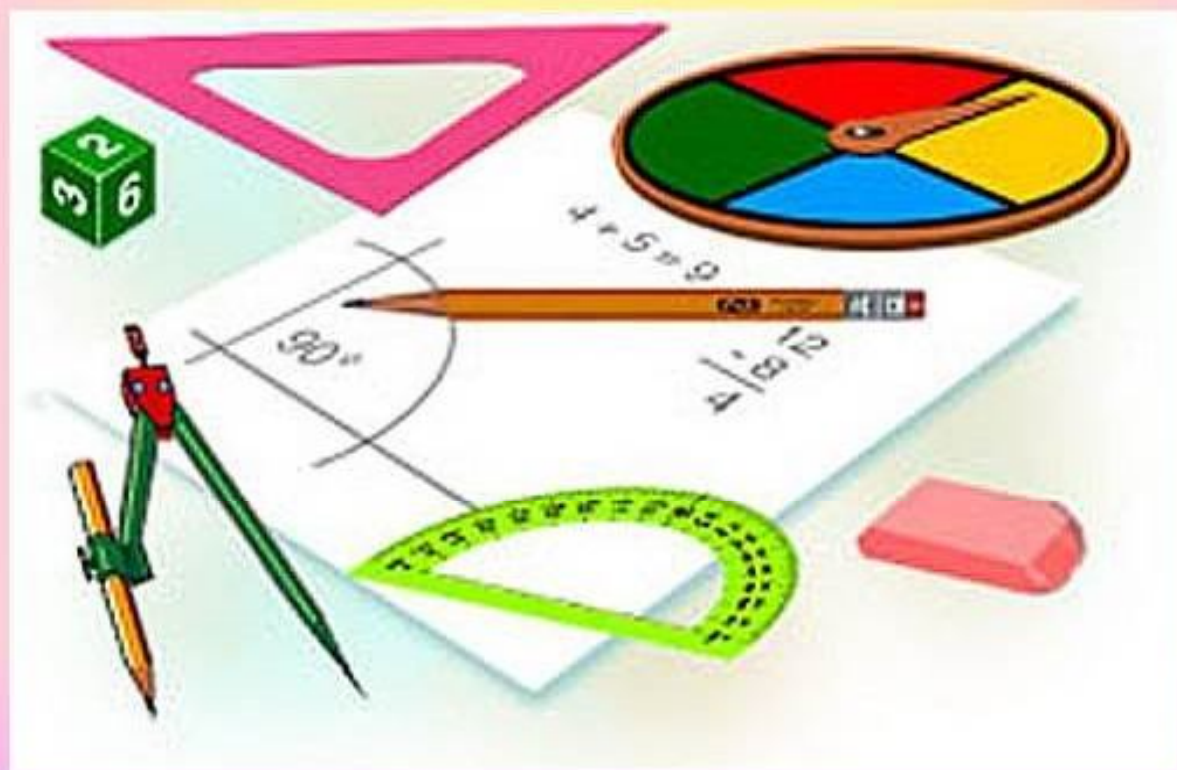
,

5



# Домашнее задание

П. 78-81, № 678, 680





**УСПЕХОВ!**

