Объём шара и его частей.

Подготовила:
Пахомова Елена Анатольевна
МОУ СОШ с.Таежное

Для добавления текста щелкните мышью

БЫСТРО И КРАТКО НАПИШИТЕ ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ:

1.Сколько сфер можно провести: а) через одну и ту же окружность;

б) через окружность и точку, не принадлежащую её плоскости?

2. Сколько сфер можно провести через четыре точки, являющиеся вершинами: а) квадрата;

б) равнобедренной трапеции;

в) ромба?

3. Верно ли, что через любые две точки сферы проходит один большой круг?

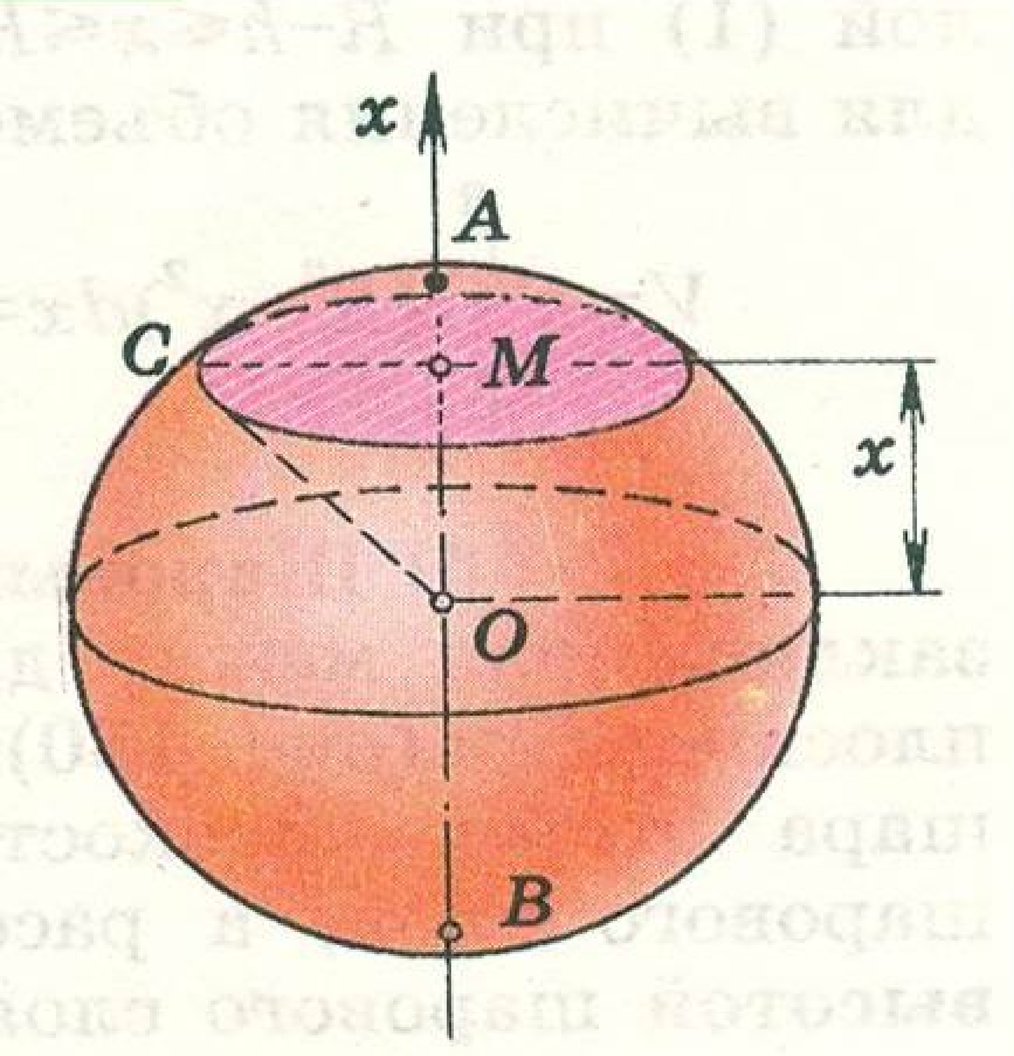
4. Через какие две точки сферы можно провести несколько окружностей большого круга?

5. Как должны быть расположены две равные окружности, чтобы через них могла пройти сфера того же радиуса?

ОТВЕТЫ К ВОПРОСАМ БЛИЦ - ОПРОСА:

1. а) бесконечно много; б) одну.
2. а) бесконечно много; б) бесконечно много; в) ни одной.
3. Нет.
4. Диаметрально противоположные.
5. Иметь общий центр.

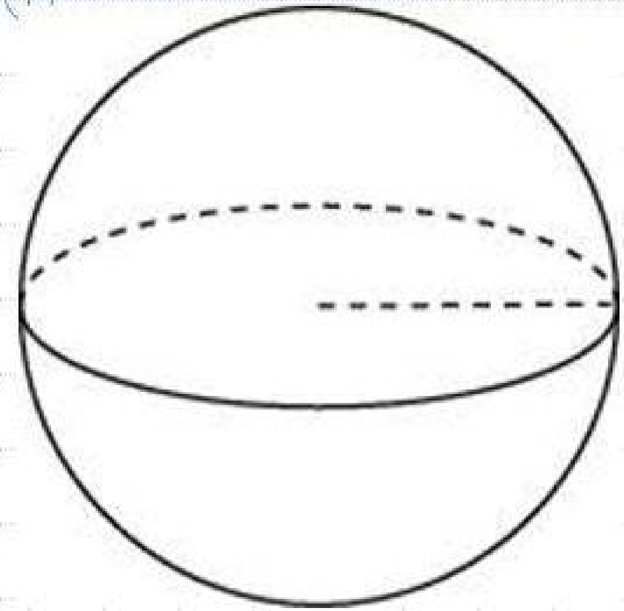
Объём шара



Объём шара радиуса R

равен $\frac{4}{3}\pi R^3$

B11 *Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?*



Решение.

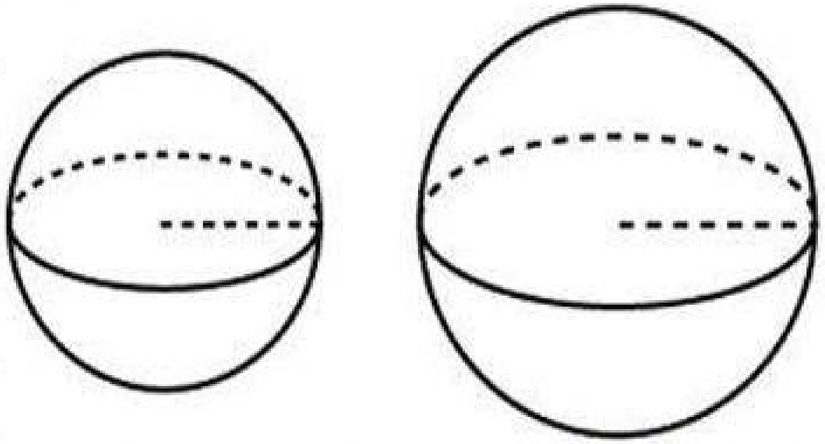
Объем шара радиуса r равен

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

При увеличении радиуса втрое, объем шара увеличится в 27 раз.

Ответ: 27.

B11 *Радиусы двух шаров равны 6, 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.*



Решение.

Из условия

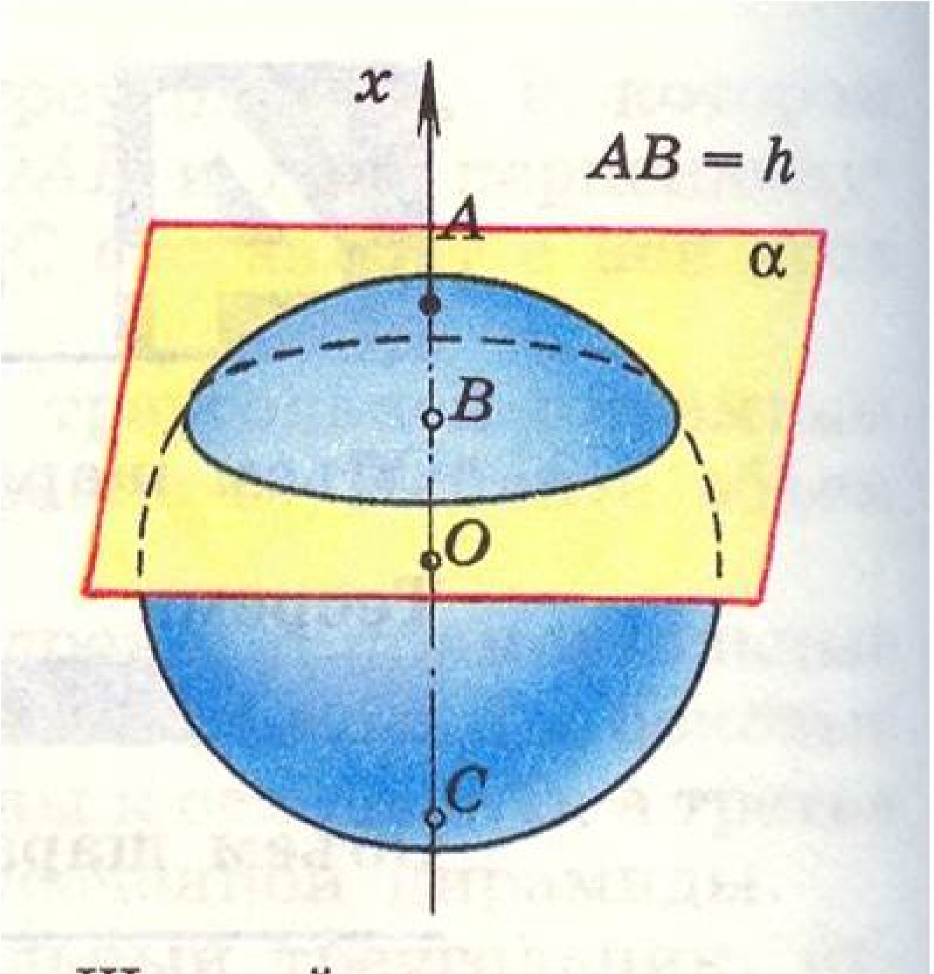
$$S_3 = S_1 + S_2$$

найдем, что радиус такого шара

$$R_3{}^2 = R_1^2 + R_2^2 \Rightarrow R_3 = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = 10$$

Ответ: 10.

Шаровой сегмент

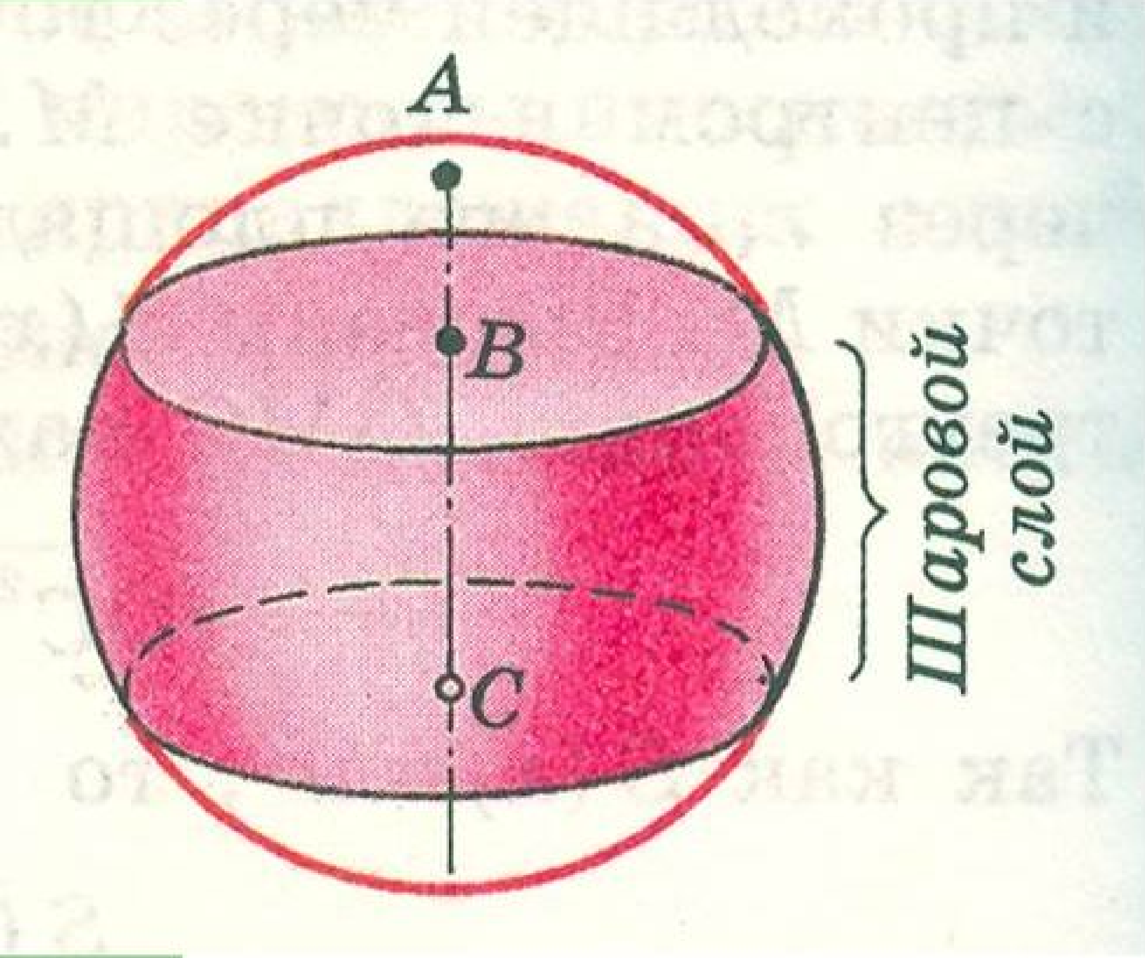


Шаровой сегмент

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью.

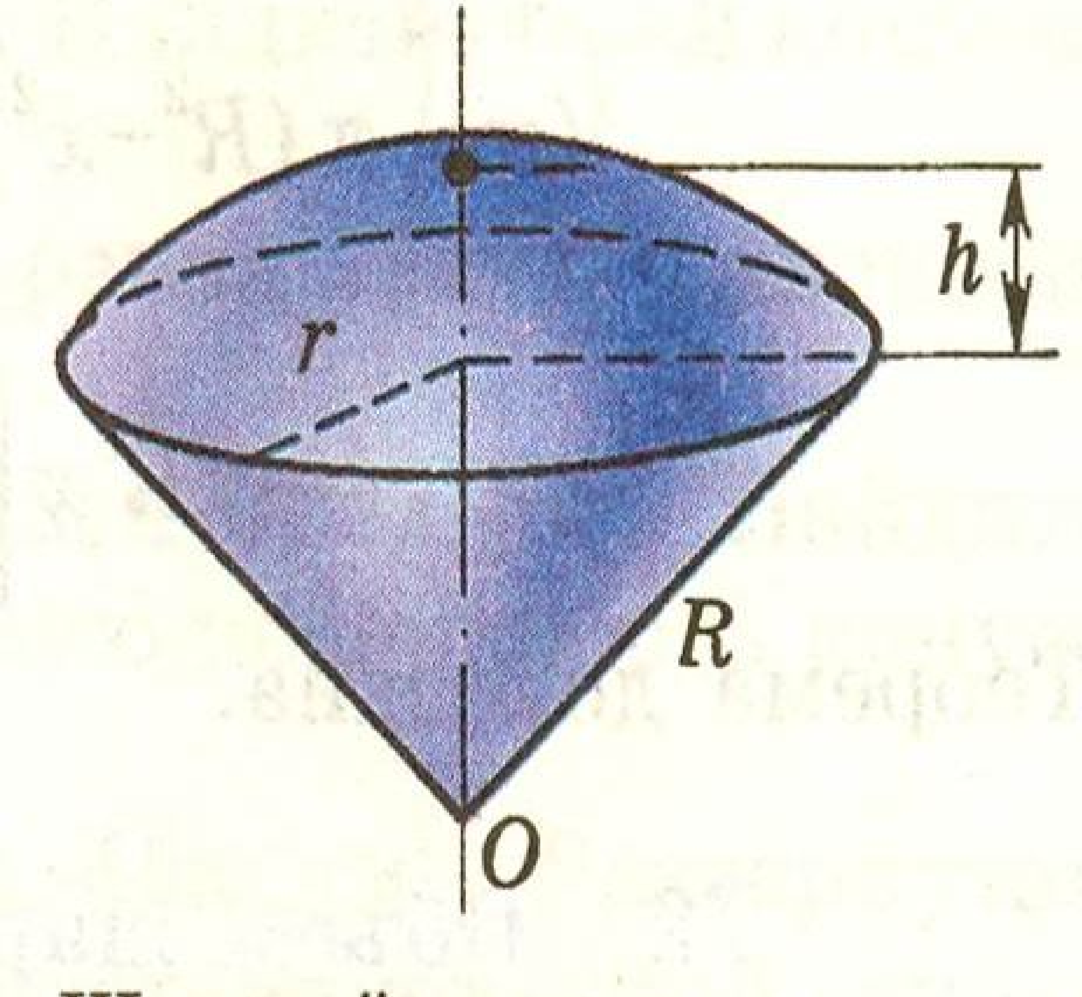
$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right).$$

Шаровой слой



- **Шаровым слоем** называется часть шара, расположенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар.
- Круги, получившиеся в сечении шара этими плоскостями, называются **основаниями шарового слоя.**
- Расстояние между плоскостями называется **высотой шарового слоя**.

Шаровой сектор



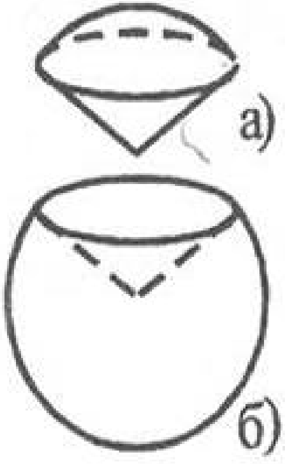
Шаровой сектор

Шаровым сектором называется тело, получаемое вращением кругового сектора с углом, меньше 90°, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Шаровой сектор

4. Шаровым сектором называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса.



Объем шарового сектора определяется формулой $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$, где H – высота соответствующего шарового сегмента.

Предложите способы решения задачи:

Точка А сферы удалена от концов её диаметра на расстояния равные 6 см и 8 см. Вычислите площадь поверхности сферы.

Примерный алгоритм решения задачи

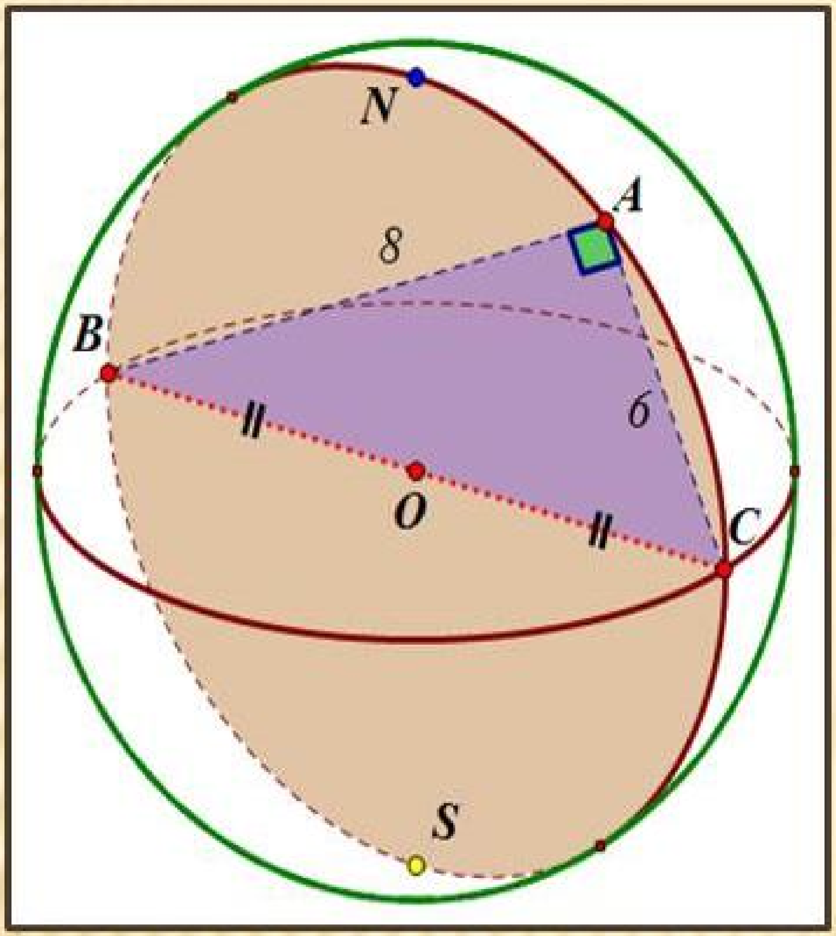
1.Выполнить графическое изображение согласно условию.

2.Выполнить на чертеже необходимые геометрические построения.

3. Провести анализ построений.

4. Произвести необходимые промежуточные расчёты с использованием формул и теорем планиметрии (геометрии на плоскости). Если необходимо, применить дополнительно формулы из стереометрии.

5. Произвести окончательные расчёты.



3. Зная катеты AB и AC прямоугольного ΔCBA, по теореме Пифагора можно найти гипотенузу BC.

4. Зная диаметр BC данной сферы можно найти её радиус.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. Плоскость , перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 3 см и 9 см. на какие части делится объем шара?

Решение:

R=(3+9)/2=6 см. Высота меньшего сегмента h равна 3 см. Его $V_1=\pi h^2(R-h/3)=45$ см^3. $V_{шара}=288\ \pi$ см^3. Значит, $V_{б.\ сегмента}=243\ \pi$ см^3.

2. Найти отношение сегментов в предыдущей задаче?

Решение: $V_1:V_2 = 45\ \pi\ /\ 243\ \pi = 5/27$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

3. Какую часть шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?

Решение: Десятая часть диаметра есть пятая часть радиуса. Значит, высота сегмента $H=R/5$,

$V_{сегм}=\pi R^2/25(R-R/15)= 14\pi R^3/375.$

$V_{сегм}/V=14/375:4/3=7/250=2,8\%$

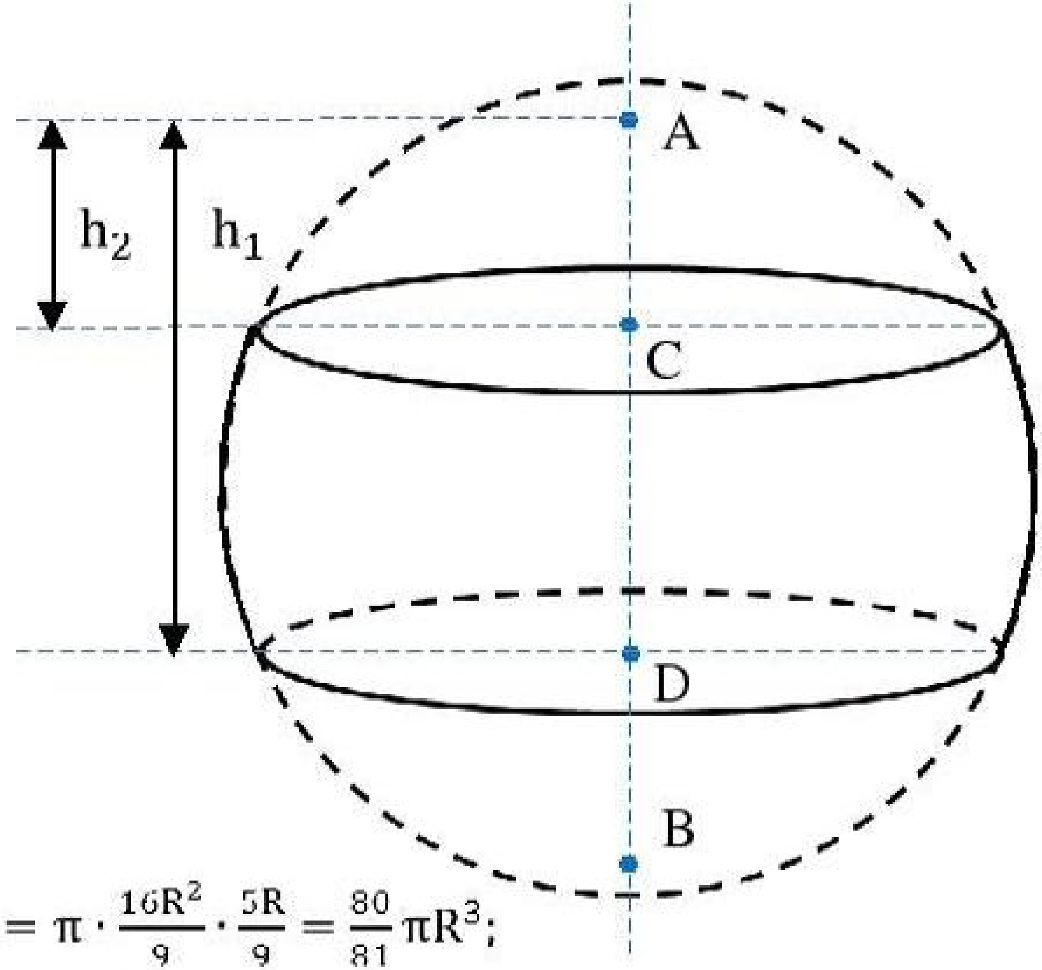
Задача 1.

Дано: шаровой слой

R — радиус шара, $(C, D) \in AB$

AB — диаметр $\quad AC = CD = DC$

Найти: $V_{\text{шар. слоя}}$



Решение:

$$\boxed{V = V_{\text{шар. сегм.1}} - V_{\text{шар. сегм.2}}} \quad AB = 2R;$$

$h_1 = AD; \quad h_2 = AC;$

$$h_1 = AD = \frac{2}{3}AB = \frac{4}{3}R; \; h_2 = AC = \frac{1}{3}AB = \frac{2}{3}R;$$

$$\boxed{V = \pi h^2 (R - \frac{1}{3}h)}$$

$$V_{\text{шар. сегм.1}} = \pi {h_1}^2 (R - \frac{1}{3}h_1) = \pi(\frac{4R}{3})^2 \; (R - \frac{4R}{3 \cdot 3}) = \pi \cdot \frac{16R^2}{9} \cdot \frac{5R}{9} = \frac{80}{81}\pi R^3;$$

$$V_{\text{шар. сегм.2}} = \pi {h_2}^2 (R - \frac{1}{3}h_2) = \pi(\frac{2R}{3})^2 \; (R - \frac{2R}{3 \cdot 3}) = \pi \cdot \frac{4R^2}{9} \cdot \frac{7R}{9} = \frac{28}{81}\pi R^3;$$

$$V = V_{\text{шар. сегм.1}} - V_{\text{шар. сегм.2}} = \frac{80}{81}\pi R^3 - \frac{28}{81}\pi R^3 = \frac{52}{81}\pi R^3.$$

Ответ: $\frac{52}{81}\pi R^3$.

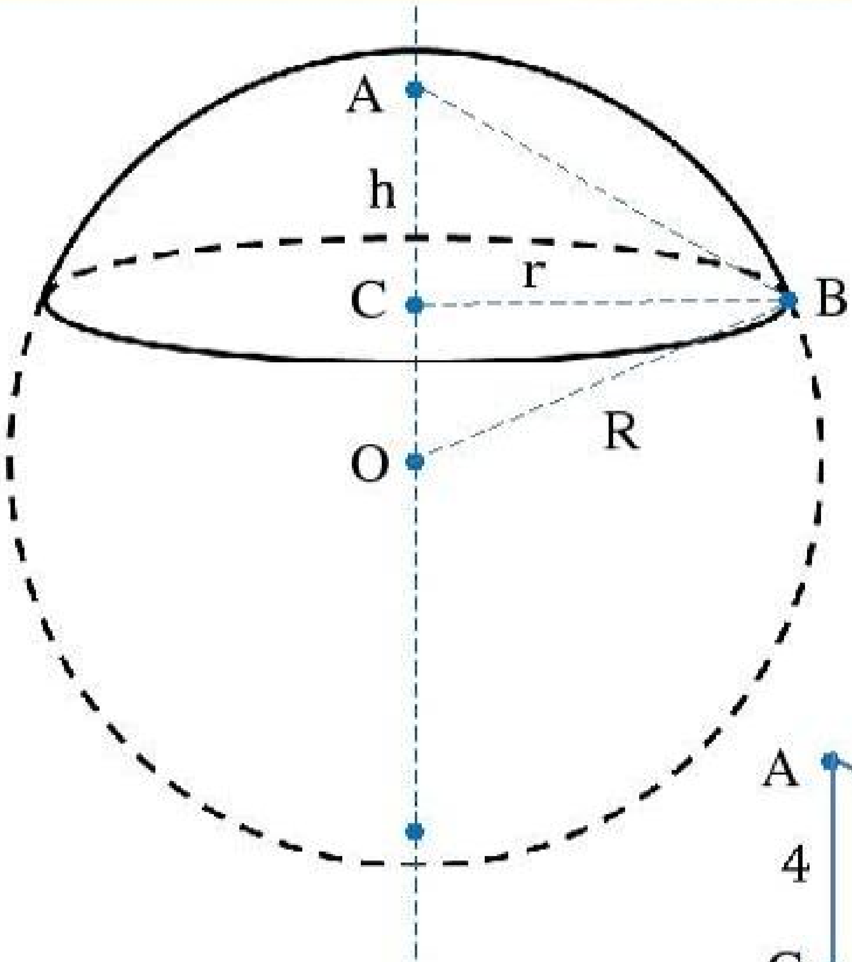
Задача 2.

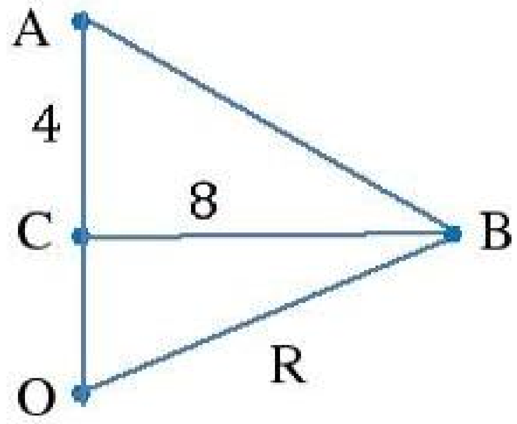
Дано:
Шаровой сегмент
$r = 8$ см
$h = 4$ см
Найти: $V_{сегм.}$
Решение:

$$\boxed{V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right)}$$

$OA = OB = R$ fl $OC = R - AC = R - 4$;
ΔBCO — прямоугольный;
$OB^2 = BC^2 + CO^2$
$R^2 = 8^2 + (R - 4)^2$;
$R^2 = 64^2 + R^2 - 8R + 16$;
$8R = 80$;
$R = 10$;
$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right) = \pi \cdot 4^2 \left(10 - \frac{4}{3}\right) = \frac{16 \cdot 26}{3} \pi = \frac{416}{3} \pi$ см^3.

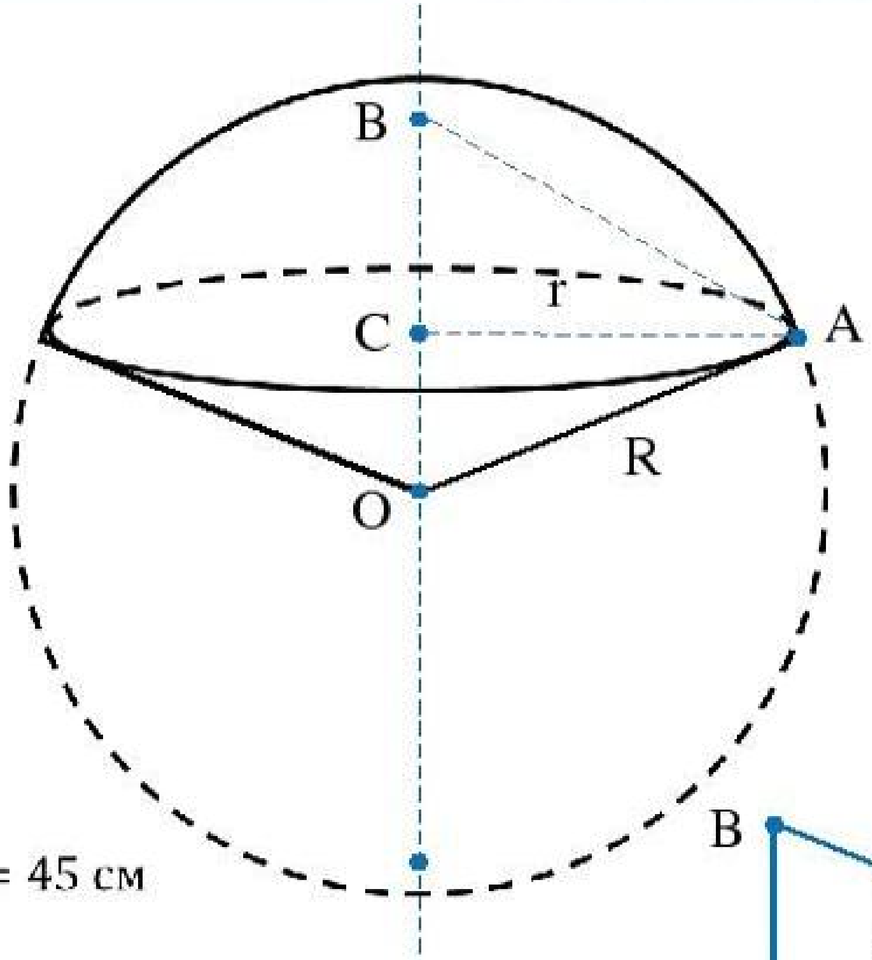
Ответ: $\frac{416}{3} \pi$ см^3.





Задача 3.

Дано: шаровой сектор
r = 60 см
R = 75 см
Найти: $V_{\text{шар. сект.}}$



Решение:

$$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

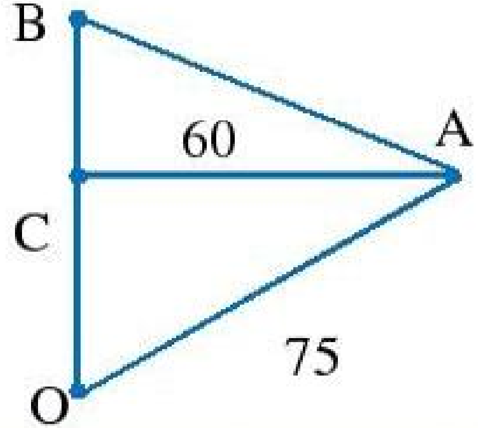
AO = OB = R fl h = CB = R – CO;

ΔAOC — прямоугольный;

$CO = \sqrt{AO^2 - AC^2} = \sqrt{75^2 - 60^2} = \sqrt{2025} = 45$ см

h = R – CO = 75 – 45 = 30 см

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2 \cdot 75^2 \cdot 3}{3}\pi = 112500\pi.$

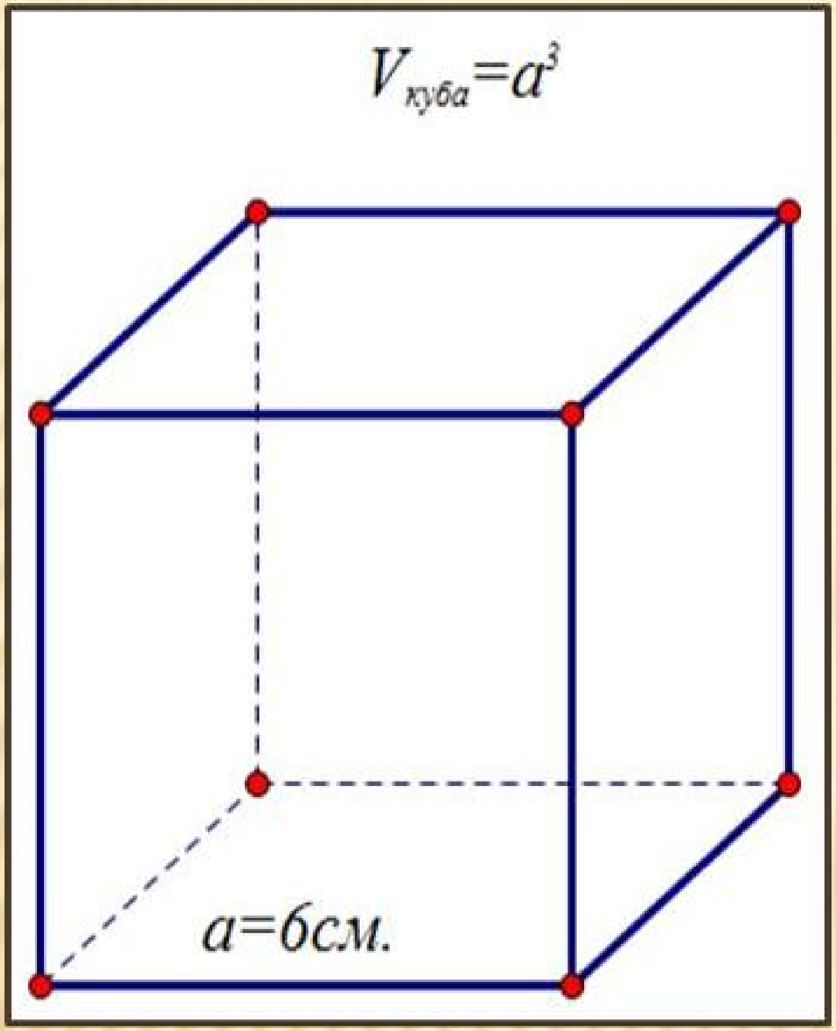


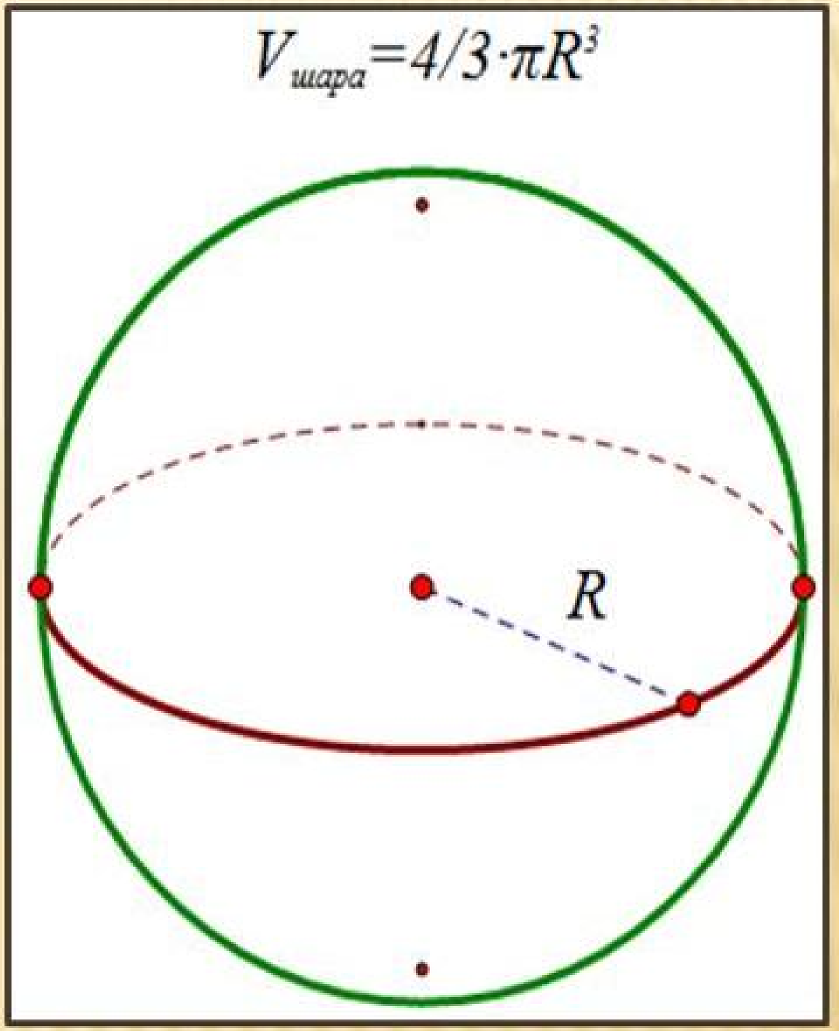
Ответ: 112 500π см^3.

РЕШИТЕ ЗАДАЧУ САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Стальной брусок, имеющий форму куба, переплавили в шар. Вычислите длину радиуса шара, если длина ребра бруска равна 6 см.

Решение задачи:





Решение:

Так как одна из вершин куба является центром сферы с радиусом, меньшим либо равным стороне куба, в кубе содержится 1/8 сферы и, соответственно, 1/8 ее поверхности, равна

$$\frac{1}{8}S = \frac{1}{8}4\pi R^2 = \frac{\pi}{2}1,6^2 = 1.28\pi$$

Ответ: 1,28.

Математический диктант

1. Вычислите объем шара, если его радиус $R = 6$ см (5 см).

2. Вычислите диаметр шара, если его объем $V = 36\pi$ $\left(\frac{32\pi}{3}\right)$.

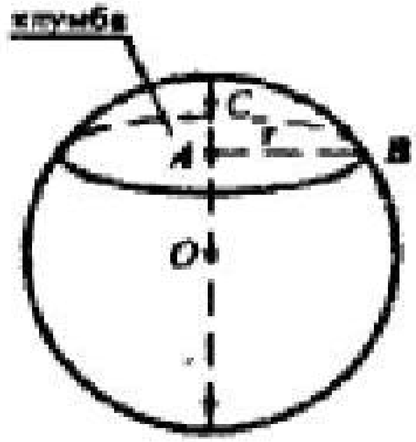
3. Объем шара равен $\frac{256\pi}{3}$ (288π). Найдите площадь большого круга (длину окружности большого круга).

4. В цилиндр вписан шар радиуса $R = 1$. Найдите отношение $V_{цил} : V_{шара}$. ($R = 2$. Найдите отношение $V_{шара} : V_{цил}$.)

Домашнее задание: п.82-84 № 713,715,718,720

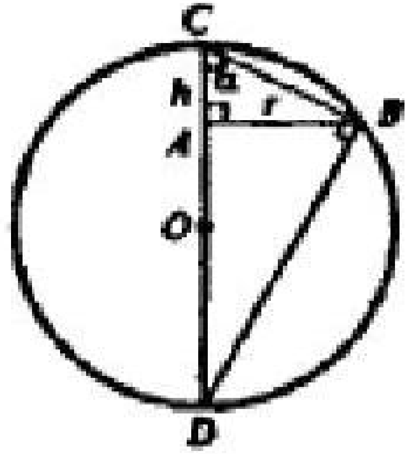
ПРОВЕРКА ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

715. Пусть $AC = h$, $AB = r$, r — радиус клумбы; примем радиус шара равным $R_{шар}$. Рассмотрим центральное сечение шара. $CD = 2R$, $\angle CBD = 90^\circ$, т.к. он опирается на диаметр CD.



Из треугольника CDB: $CB = 2R\cos\alpha$; из ΔACB:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{CB} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$



Получили уравнение: $2R\dfrac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \sqrt{h^2 + r^2}$,

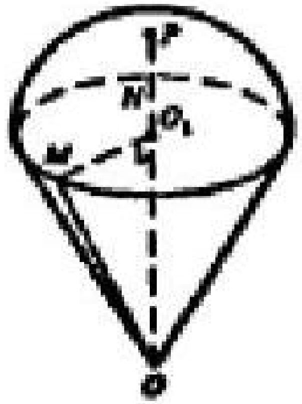
$$2Rh = h^2 + r^2,\ R = \frac{h^2 + r^2}{2h}\ (h = 0{,}6\ \text{м}),$$

$$R = \frac{0{,}36 + 25}{2 \cdot 0{,}6} = \frac{25{,}36}{1{,}2} = \frac{317}{15}\ \text{м}.$$

$$V_{\text{сегм}} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)\ (0{,}6)^2 \cdot \pi\left(\frac{317}{15} - \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{25}\pi \cdot \frac{314}{15} = \frac{3 \cdot 314\pi}{3 \cdot 25} = \frac{924\pi}{125}$$

ПРОВЕРКА ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

720. Пусть R — радиус шара, r — радиус основания сегмента. Вычислим высоту сегмента $H = PO_1$, $OP = R$.



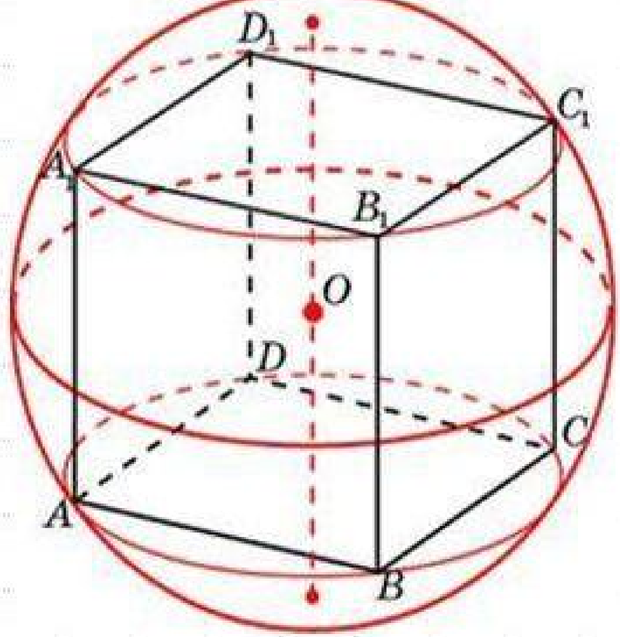
Из прямоугольного треугольника ΔOO_1M:

$$OO_1 = \sqrt{OM^2 - O_1M^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45 \text{ см}$$

$$H = PO_1 = OP - O_1O = 75 - 45 = 30 \text{ см.}$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{2}{3}\pi \cdot 75^2 \cdot 30 = \pi \cdot 20 \cdot 5625 = 112500\pi \text{ см}^3$$

B11 *Около куба с ребром* $\sqrt{3}$ *описан шар. Найдите объем этого шара, деленный на* π



Решение.

Радиус описанного шара равен половине диагонали куба:

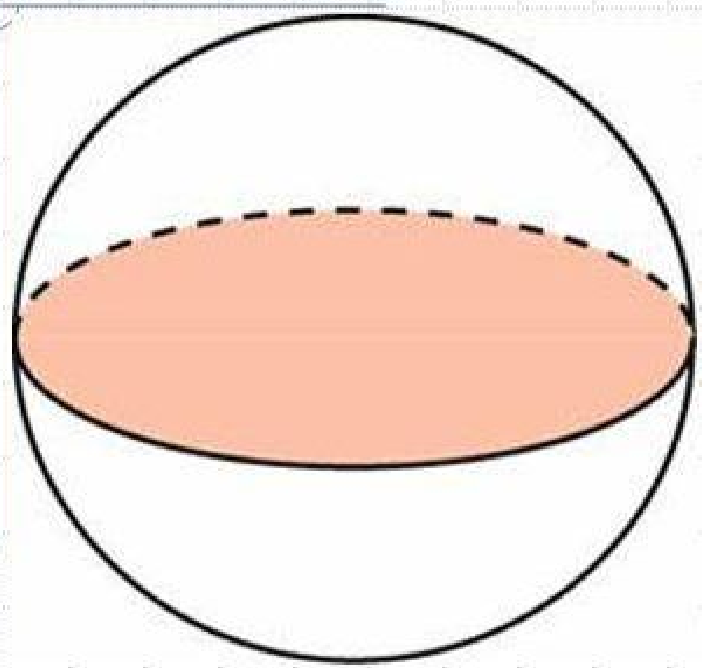
$$R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

Поэтому объем шара равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{2}\pi.$

Тогда $\frac{V}{\pi} = \frac{9}{2} = 4,5.$

Ответ: 4,5.

B11 *Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.*



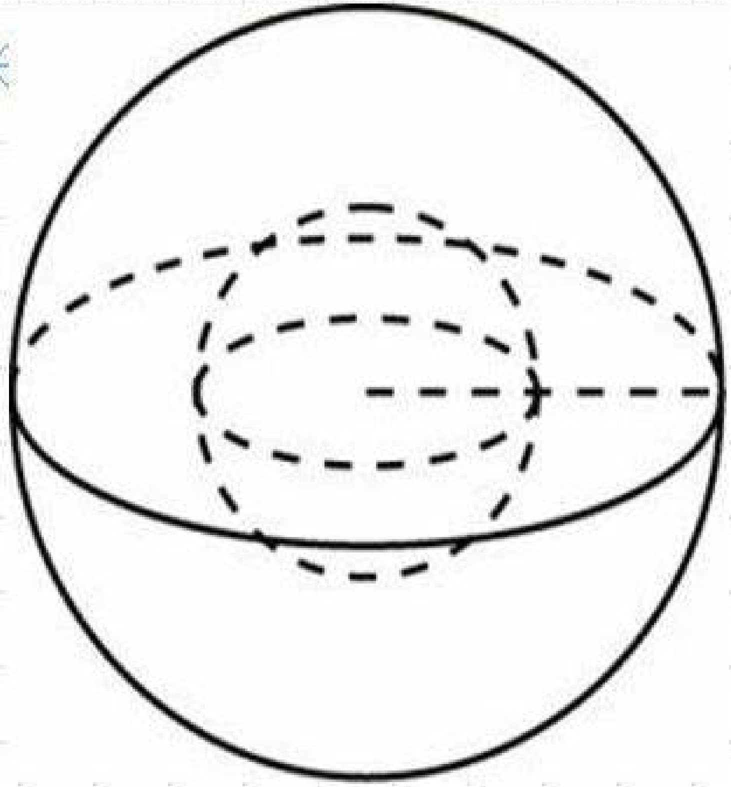
Решение.

Радиус большого круга является радиусом шара. Площадь первого выражается через радиус r как $S_K = \pi r^2$, а площадь поверхности сферы – как $4\pi R^2$. Видно, что площадь поверхности шара в 4 раза больше площади поверхности большого круга.

Ответ: 12.

B11

Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в 2 раза?



Решение.

Площадь поверхности шара выражается через его радиус r *как* $S = 4\pi r^2$

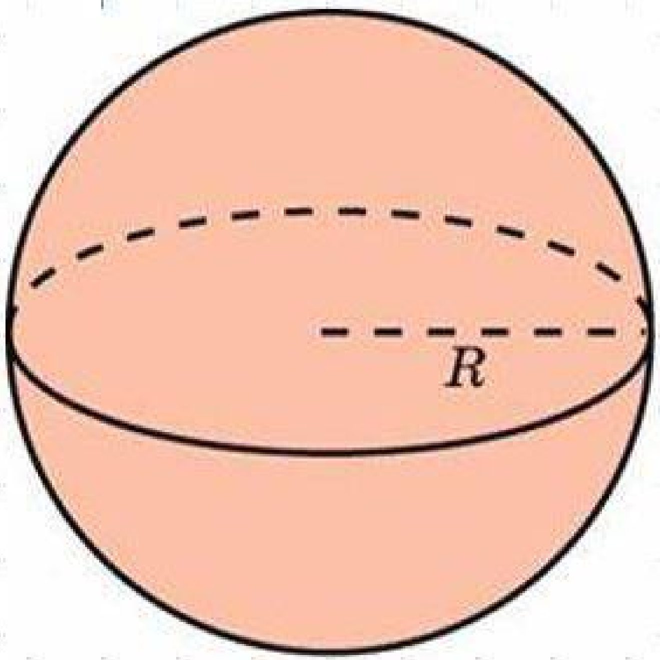
, поэтому при увеличении радиуса вдвое площадь увеличится в 4 *раза.*

Ответ: 4.

B11

Объем шара равен 288 π

Найдите площадь его поверхности, деленную на π



Решение.

Объем шара радиуса R

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$ *, откуда*

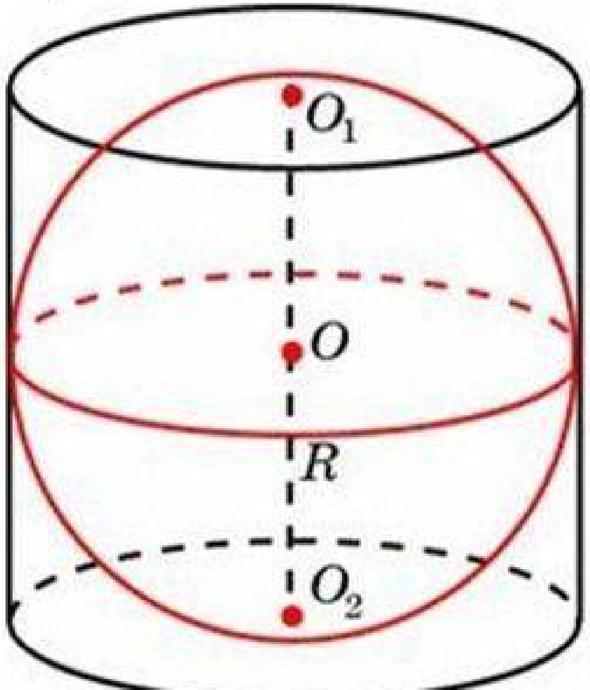
$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 288}{4}} = 6$$

Площадь его поверхности:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi 6^2 = 144\pi$$

Ответ: 144.

B11 *Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 18. Найдите площадь поверхности шара.*



Решение.

По построению радиусы шара и основания цилиндра равны. Площадь цилиндра, описанного вокруг шара радиусом r *равна*

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r 2r = 6\pi r^2$$

Площадь поверхности шара радиусом r равна $S = 4\pi r^2$

, то есть в 1,5 раза меньше первой. Площадь поверхности шара тогда равна 12.

Ответ: 12.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1 вариант

1.Шар радиуса R пересечен плоскостью, отстоящей от центра на расстоянии R/2. В каком отношении эта плоскость делит объем шара?
2.Чему равен объем шара, описанного около куба с ребром 2?

2 вариант

1.Радиусы трех шаров 3,4,5 см. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.
2.Чему равен объем шара, вписанного в куб с ребром 1.

ОТВЕТЫ

1 вариант

1.5/27

2.$V=4\pi\sqrt{3}$

2 вариант

1.6 см

2.$V=1/6\pi$

Литература

- «Геометрия 10 – 11» учебник для общеобразовательных учреждений Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов и др. Москва «Просвещение» 2003г.
- «Изучение геометрии 10 – 11» методические рекомендации к учебнику (книга для учителя) С.М.Саакян, В.Ф.Бутузов. Москва «Просвещение» 2001г.